1ο Κεφάλαιο

1ο μάθημα

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

2ο μάθημα

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Τριγωνομετρικές εξισώσεις

3ο μάθημα

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

4ο μάθημα

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Μάθημα 1

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

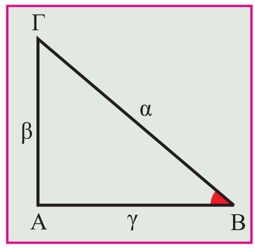
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

• **Τριγωνομετρικοί αριθμοί που συνδέονται με τις οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου**

Έστω ΑΒΓ $(A = 90^{o})$ ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β, γ.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu B = \frac{\text{μήκος απέναντι πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\beta}{\alpha}$$



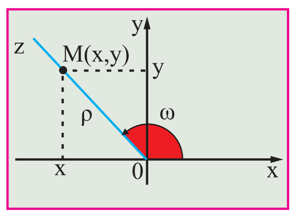
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0 \le \omega \le 360$.

Έστω ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Οx όταν περιστραφεί αριστερόστροφα (δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού).
Η ημιευθεία Οx λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω και η ημιευθεία Οz **τελική πλευρά** αυτής.



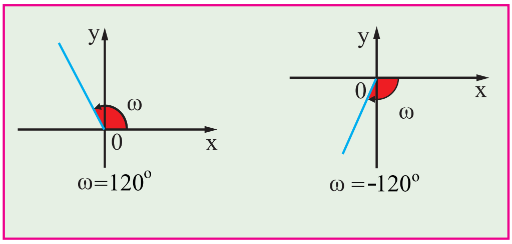
Για την γωνία ω ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}(x \neq 0),\quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}(y \neq 0)$$

όπου $M(x, y)$ οποιοδήποτε σημείο της τελικής πλευράς διαφορετικό από το σημείο Ο και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

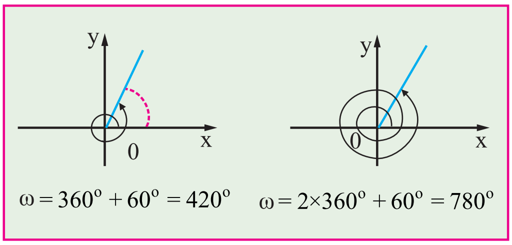
• **Γωνίες μεγαλύτερες των 360^o – "Αρνητικές γωνίες"**

Αν φανταστούμε ότι ο ημιάξονας Ox περιστραφεί αριστερόστροφα **(θετική φορά)** κατά 120^o λέμε ότι έχει διαγράψει θετική γωνία 120^o. Αν περιστραφεί δεξιόστροφα κατά γωνία 120^o, λέμε ότι έχει διαγράψει αρνητική γωνία 120^o δηλαδή γωνία: -120^o



Αν ο ημιάξονας Ox περιστραφεί αριστερόστροφα και αφού συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή (360^o) διαγράψει επιπλέον γωνία 60^o, τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 360^o + 60^o = 420^o$$



Αν συμπληρώσει δύο πλήρεις περιστροφές και επιπλέον γωνία 60^o λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$\omega = 2 \cdot 360^o + 60^o = 780^o$$

Γενικότερα, αν ο ημιάξονας Ox συμπληρώσει κ πλήρεις περιστροφές κινούμενος αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα και επιπλέον διαγράψει γωνία ω τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$\kappa \cdot 360^o + \omega \text{, όπου } \kappa \in Z \quad (1)$$

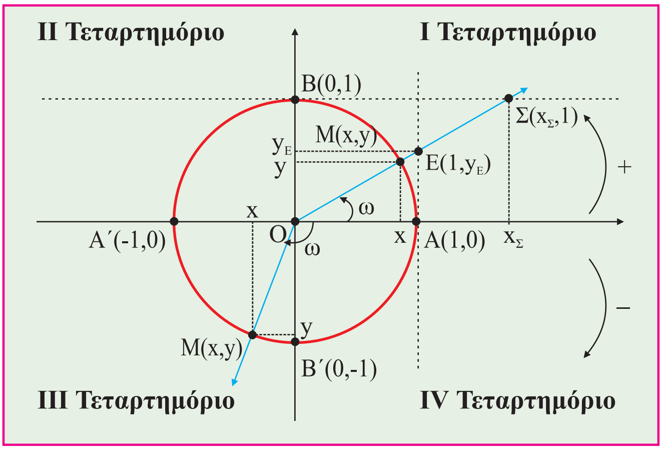
(αν $\kappa > 0$ έχει διαγράψει θετική γωνία, αν $\kappa < 0$ έχει διαγράψει αρνητική γωνία)

Οι γωνίες που δίνονται από τον τύπο (1) έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αφού όλες έχουν την ίδια τελική πλευρά δηλαδή:

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^o + \omega) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^o + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(\kappa \cdot 360^o + \omega) = \varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(\kappa \cdot 360^o + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

• Τριγωνομετρικός κύκλος



Ο κύκλος με κέντρο την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$, λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x,y)$, τότε:

$$\text{συνω} = x \ \text{ και } \ \text{ημω} = y$$

Φανερό είναι ότι:

$$-1 \le \text{συνω} \le 1 \ \text{ και } \ -1 \le \text{ημω} \le 1$$

αφού πάντα οι προβολές του Μ θα ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Α και Β΄Β. Επίσης τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω φαίνονται στον επόμενο πίνακα και είναι ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω.

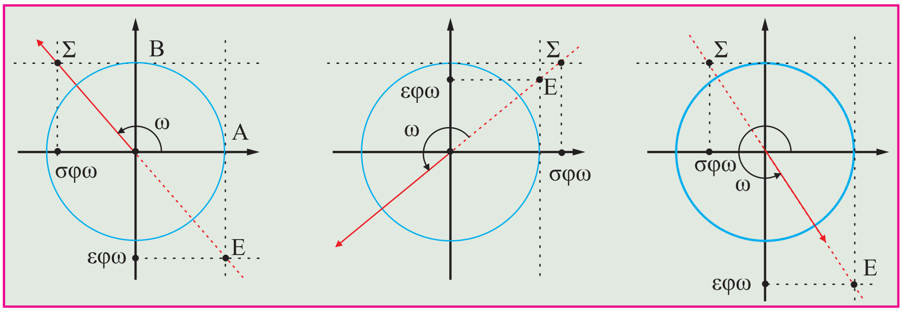
Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω

	Τεταρτημόρια			
	I	II	III	IV
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

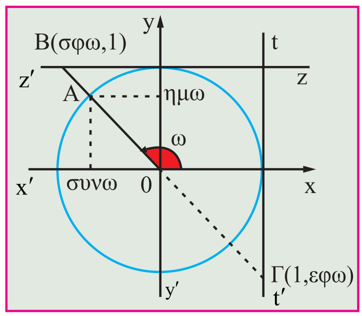
• Άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων

Στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας, που φαίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $A(1,0)$ και την εφαπτομένη στο σημείο $B(0,1)$.
Η εφαπτομένη στο Α λέγεται ευθεία των εφαπτομένων και η εφαπτομένη στο Β λέγεται ευθεία των συνεφαπτομένων.

Είναι: $εφω = y_E$ και $σφω = x_Σ$



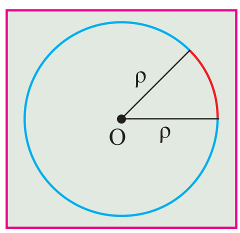
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω με τελική πλευρά στο 2^o τεταρτημόριο.



• Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Γνωρίζουμε το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και συγκεκριμένα:
Αν ένα κυκλικό τόξο έχει μήκος ίσο με το μήκος της ακτίνας του κύκλου που ανήκει, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως τόξο ενός ακτινίου (1 rad).

Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ ισούται με 2πρ (όπου $\pi \simeq 3,14$) είναι φανερό ότι κάθε κύκλος μπορεί να χαρακτηρίζεται και ως κυκλικό τόξο 2π ακτινίων (2π rad)
Φανερό είναι επίσης ότι κάθε ημικύκλιο μπορεί να δηλωθεί και ως τόξο π $(\simeq 3,14)$ ακτινίων και κάθε τεταρτημόριο (κύκλου), ως τόξο $\frac{\pi}{2}$ $(\simeq 1,57)$ ακτινίων.



Προσδιορίζουμε την τιμή (έκφραση) ενός τόξου μ^o (μοιρών) σε ακτίνια από τον τύπο:

$$\alpha = \frac{\mu^o}{180^o} \cdot \pi$$

αφού ο αριθμός $\frac{\pi}{180}$ δηλώνει το μέρος της ακτίνας που καλύπτει τόξο μιας μοίρας, δηλαδή κάθε κυκλικό τόξο ίσο προς το $\frac{1}{360}$ του κύκλου που ανήκει.

Ορίζουμε το ακτίνιο (1 rad) ως τη γωνία που όταν γίνει επίκεντρη ενός κύκλου (Ο,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού.

π.χ. 360° αντιστοιχούν σε 2π rad

1° αντιστοιχεί σε $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ rad

1 rad αντιστοιχεί σε $\frac{360}{2\pi}$ μοίρες

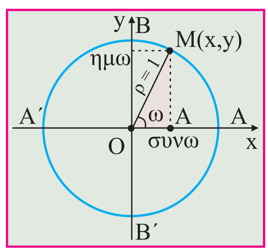
α rad αντιστοιχεί σε $\alpha\frac{360}{2\pi} = \alpha\frac{180}{\pi}$ μοίρες

μ° αντιστοιχούν σε $\frac{\pi}{180}\mu$ rad

• Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών

ω (μοίρες)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ω (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
σφω	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

• Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες



1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ παίρνουμε:

$(AM)^2 + (OA)^2 = (OM)^2$ δηλαδή $(\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

Συνήθως γράφουμε:

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1} \qquad (1)$$

2. Είναι : $\boxed{εφω = \dfrac{ημω}{συνω}}$ και $\boxed{σφω = \dfrac{συνω}{ημω}}$ (2)

εφόσον $συνω \neq 0$ και $ημω \neq 0$ αντίστοιχα.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε: $\boxed{εφω \cdot σφω = 1}$ (3)

3. Από την ταυτότητα (1), αν $συνω \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{ημ^2ω}{συν^2ω} + \frac{συν^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω} \Leftrightarrow εφ^2ω + 1 = \frac{1}{συν^2ω} \Leftrightarrow \boxed{συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω}} \quad (4)$$

Ομοίως, αν διαιρέσουμε την (1) με $ημω \neq 0$, παίρνουμε: $\boxed{ημ^2ω = \dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}}$ (5)

Συγκεντρώσαμε τις παραπάνω ταυτότητες στον επόμενο πίνακα:

Ταυτότητα	**Με την προϋπόθεση**
$ημ^2ω + συν^2ω = 1$	$ω \in R$
$εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$	$ω \in R$, $συνω \neq 0$
$σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$	$ω \in R$, $ημω \neq 0$
$εφω \cdot σφω = 1$	$ω \in R$, $ημω \cdot συνω \neq 0$
$ημ^2ω = \dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$	$ω \in R$, $συνω \neq 0$
$συν^2ω = \dfrac{1}{1+εφ^2ω}$	$ω \in R$, $συνω \neq 0$

Παρατηρήσεις

1. Οι αριθμοί ημω, συνω, εφω και σφω (όταν υπάρχουν) καλούνται (βασικοί) **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του τόξου ω ή της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίαςω.

2. Ο τύπος (1) ισχύει, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, και όταν το πέρας Μ του τόξου ταυτίζεται με ένα από τα σημεία $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$, $B'(0,-1)$, όταν δηλαδή

$$ω = 2κπ \text{ ή } 2κπ + \frac{π}{2} \text{ ή } 2κπ + π \text{ ή } 2κπ + \frac{3π}{2} \text{ με } κ \in Z .$$

3. Για κάθε τόξο με πέρας τα σημεία $B(0,1)$ ή $B'(0,-1)$ (ή κάθε γωνία με τελική πλευρά του ημιάξονα Oy ή Oy΄ αντίστοιχα) **δεν ορίζεται εφαπτομένη**, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν συνημίτονο ίσο με μηδέν.

Άρα, τα τόξα με προσημασμένα μέτρα: $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$ δεν έχουν εφαπτομένη.

Κάθε τόξο με πέρας το σημείο $A(1,0)$ ή $A'(-1,0)$ δεν έχει συνεφαπτομένη, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν ημίτονο ίσο με μηδέν.
Οπότε, τα τόξα με "προσημασμένα μέτρα": $\omega = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$ δεν έχουν συνεφαπτομένη.

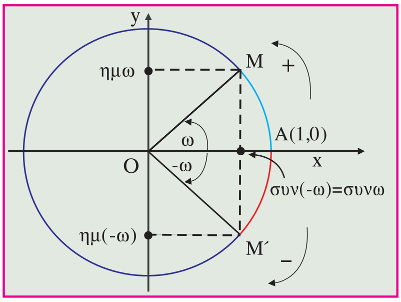
• **Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο**

1. Αντίθετα τόξα (αντίθετες γωνίες)

Δύο αντίθετα τόξα ω και – ω με κοινή αρχή το $A(1,0)$ (ή αντίθετες γωνίες με κοινή αρχική πλευρά την OA) έχουν προφανώς περατα Μ και Μ΄ (τελικές πλευρές) συμμετρικά (συμμετρικές) ως προς τον άξονα x΄x, οπότε:

$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$, $\quad \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$,

$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$, $\quad \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$



2. Τόξα (γωνίες) με διαφορά 180° ή π

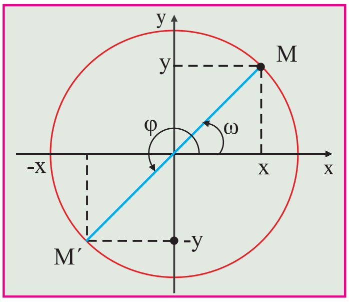
Είναι $\varphi = \pi + \omega$ τότε:

$\eta\mu\varphi = \eta\mu(\pi+\omega) = -\eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(\pi+\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi(\pi+\omega) = \varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi(\pi+\omega) = \sigma\varphi\omega$



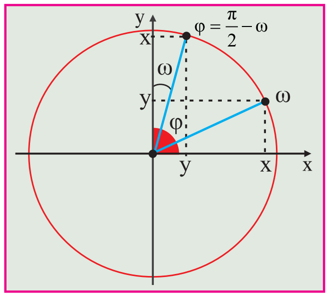
3. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα (διαφορά) 90^o ή $\frac{\pi}{2}$

Αν $\varphi+\omega=\frac{\pi}{2}$, τότε: $\eta\mu\varphi=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$$

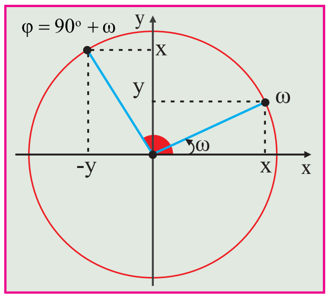


Αν $\varphi=\frac{\pi}{2}+\omega$, τότε: $\eta\mu\varphi=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega$$



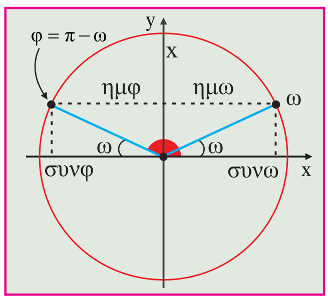
4. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα 180^o ή π

Είναι $\varphi=\pi-\omega$, τότε: $\eta\mu\varphi=\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi(\pi-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi=\sigma\varphi(\pi-\omega)=-\sigma\varphi\omega$$



	$-x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\frac{3\pi}{2}+x$	$2\pi-x$	$2\pi+x$
		$90-x$	$90+x$	$180-x$	$180+x$	$270-x$	$270+x$	$360-x$	$360+x$
ημ	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$
συν	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$
εφ	$-\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi x$
σφ	$-\sigma\varphi x$	$\varepsilon\varphi x$	$-\varepsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$\varepsilon\varphi x$	$-\varepsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$

Παράδειγμα
Να εκφράσετε τα ημφ, συνφ συναρτήσει των ημω, συνω στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $\varphi+\omega=2\pi$ **ii.** $\varphi+\omega=\frac{3\pi}{2}$ **iii.** $\varphi-\omega=\frac{3\pi}{2}$

Λύση
Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

i. $\eta\mu\varphi=\eta\mu(2\pi-\omega)=\eta\mu(2\pi+(-\omega))=\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu(2\pi-\omega)=\sigma\upsilon\nu(2\pi+(-\omega))=\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$

ii. $\eta\mu\varphi=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=-\eta\mu\omega$

iii. $\eta\mu\varphi=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\omega$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1
Σε ασκήσεις μετατροπής μοιρών σε rad και αντίστροφα χρησιμοποιούμε:

α. τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}$ **β.** π rad = 3,14rad αντιστοιχούν σε 180^{o}

Παράδειγμα 1
Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία 10 rad
Λύση

Ισχύει: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\frac{10}{3,14}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow 3,14\cdot\mu=10\cdot180\Leftrightarrow\mu=\frac{1800}{3,14}\approx573^{o}$

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία $\frac{3\pi}{20}$rad **.**

Λύση

Επειδή π(rad) αντιστοιχούν σε 180^{o} έχουμε $\frac{3\pi}{20}$rad αντιστοιχούν σε $\frac{3\cdot180^{o}}{20}=27^{o}$.

Παράδειγμα 3

Να μετατρέψετε τη γωνία τις 390^o σε rad.

Λύση:

Ισχύει: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\pi}=\frac{390}{180}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\pi}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow 6\alpha=13\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{13\pi}{6}\text{rad}=\frac{13\cdot 3,14}{6}\text{rad}=6,8\text{rad}$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Σε ασκήσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, έστω α, θα ελέγχουμε:

1. Αν $0\le\alpha\le 360^o$ και θα χρησιμοποιούμε τους τύπους της αναγωγής στο 1^0 τεταρτημόριο
2. Αν $\alpha>360^o$ και θα διαιρούμε το α με το 360 φέρνοντας το α στην μορφή $\alpha=360\kappa+\omega$ ή $\alpha=2\pi\cdot\kappa+\omega$.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. $\eta\mu 120^o$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 210^o$ **γ.** $\varepsilon\varphi 330^o$ **δ.** $\sigma\upsilon\nu 330^o$

ε. $\eta\mu\left(-300^o\right)$ **στ.** $\sigma\upsilon\nu 3540^o$ **ζ.** $\sigma\varphi\left(-4440\right)$ **η.** $\eta\mu 2001\pi$

θ. $\varepsilon\varphi 2002\pi$

Λύση

α. είναι $\eta\mu 120^o=\eta\mu\left(90^o+30^o\right)=\sigma\upsilon\nu 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$

β. είναι $\sigma\upsilon\nu 210^o=\sigma\upsilon\nu\left(180^o+30^o\right)=-\sigma\upsilon\nu 30^o=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ. είναι $\varepsilon\varphi 330^o=\varepsilon\varphi\left(270^o+60^o\right)=-\sigma\varphi 60^o=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

δ. είναι $\sigma\upsilon\nu 330^o=\sigma\upsilon\nu\left(360^o-30^o\right)=\sigma\upsilon\nu 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ε. είναι $\eta\mu\left(-300^o\right)=-\eta\mu 300^o=-\eta\mu\left(270^o+30^o\right)=-\left(-\sigma\upsilon\nu 30^o\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

στ. Απ’την διαίρεση 3540:360 έχουμε: $3540=360\cdot 9+300$

Άρα $\sigma\upsilon\nu 3540^o=\sigma\upsilon\nu\left(360^o\cdot 9+300^o\right)=\sigma\upsilon\nu 300^o=\sigma\upsilon\nu\left(270^o+30^o\right)=\eta\mu 30^o=\frac{1}{2}$

ζ. Απ’την διαίρεση 4440:360 έχουμε: $4440=360\cdot 12+120$

Άρα $\sigma\varphi(-4440^o)=-\sigma\varphi4440^o=-\sigma\varphi(360^o\cdot12+120^o)$

$=-\sigma\varphi120^o=-\sigma\varphi(90^o+30^o)=-(-\varepsilon\varphi30^o)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

η. $\eta\mu2001\pi=\eta\mu(2000\pi+\pi)=\eta\mu(1000\cdot2\pi+\pi)=\eta\mu\pi=0$

θ. $\varepsilon\varphi2002\pi=\varepsilon\varphi(1001\cdot2\pi)=\varepsilon\varphi0=0$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουμε τον πίνακα της σελ 20 αρκεί να γνωρίζουμε ότι:

- Αν η γωνία x είναι της μορφής $(2\kappa+1)\,\pi\pm\alpha$ ή $2\kappa\pi\pm\alpha$ ή $-\alpha$, $\kappa\in Z$ τότε ο τριγωνομετρικός αριθμός παραμένει ο ίδιος με πρόσημο + ή – ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας (θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

  π.χ. $\eta\mu(3\pi-\alpha)=\eta\mu(\pi-\alpha)=\eta\mu\alpha$

- Αν η γωνία x είναι της μορφής $(2\kappa+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\kappa\in Z$ τότε καταλήγουμε σε μορφή: $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ή $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ κάνοντας την διαίρεση $(2\kappa+1):2$ και ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει από ημ σε συν, από εφ σε σφ και αντίστροφα. Το πρόσημο που θέτουμε εξαρτάται πάλι από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

  π.χ. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\theta$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2}+\theta\right)$ **ii.** $\varepsilon\varphi\left(\frac{45\pi}{2}-\theta\right)$ **iii.** $\eta\mu(2003\pi+\theta)$

Λύση

i. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(60\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\theta$

ii. $\varepsilon\varphi\left(\frac{45\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(22\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\theta$

iii. $\eta\mu(2003\pi+\theta)=\eta\mu(2002\pi+\pi+\theta)=\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν μας δίνεται ο τριγωνομετρικός αριθμός μιας γωνίας και ζητείται να υπολογίσουμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χρησιμοποιούμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες λαμβάνοντας υπόψιν το διάστημα μεταβολής της γωνίας.

Παράδειγμα 6

Δίνεται ότι: $ημx = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (1) **και** $π < x < \frac{3π}{2}$ (2)

Να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$, παίρνουμε $συν^2x = 1 - ημ^2x$.

Αντικαθιστούμε το ημx με $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ και έχουμε:

$$συν^2x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Επειδή $π < x < \frac{3π}{2}$, είναι $συνx < 0$ και συνεπώς:

$$συνx = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$$

Από τις ταυτότητες $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx}$ έχουμε:

- $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Δηλαδή $εφx = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Δηλαδή $σφx = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(ή αλλιώς: : $σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα εργαζόμαστε με τους εξής τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Αρχίζουμε από το πιο σύνθετο μέλος και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες και πράξεις προσπαθούμε να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

2^{ος} τρόπος

Ξεκινάμε και από τα δύο μέλη συγχρόνως και κάνοντας πράξεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες προσπαθούμε με ισοδυναμίες να καταλήξουμε σε μία σχέση που ισχύει.

Παράδειγμα 7

Ν' αποδείξετε ότι: **α.** $\dfrac{εφx-σφy}{εφx+σφy}=1-2συν^2x$ **β.** $\dfrac{1+ημα}{συνα}=\dfrac{συνα}{1-ημα}$

Λύση

α. Από το 1^0 μέλος (το πιο σύνθετο) θα φθάσουμε στο 2^0 μέλος.

Είναι $\dfrac{εφx-σφy}{εφx+σφy}=\dfrac{\dfrac{ημx}{συνx}-\dfrac{συνx}{ημx}}{\dfrac{ημx}{συνx}+\dfrac{συνx}{ημx}}=\dfrac{\dfrac{ημ^2x-συν^2x}{ημx\cdot συνx}}{\dfrac{ημ^2x+συν^2x}{ημx\cdot συνx}}=\dfrac{\dfrac{ημ^2x-συν^2x}{ημx\cdot συνx}}{\dfrac{1}{ημx\cdot συνx}}=\dfrac{ημ^2-συν^2x}{1}=$

$$=ημ^2x-συν^2x==\left(1-συν^2x\right)-συν^2x=1-2συν^2x$$

β. Κάνουμε πράξεις στα δύο μέλη συγχρόνως:

έχουμε: $\dfrac{1+ημα}{συνα}=\dfrac{συνα}{1-ημα}\Leftrightarrow\left(1+ημα\right)\left(1-ημα\right)=συν^2α\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-ημ^2α=συν^2α\Leftrightarrow 1=ημ^2α+συν^2α\Leftrightarrow 1=1$, που ισχύει.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται ν'αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση είναι σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη απο το τόξο που υπάρχει στην παράσταση) χρησιμοποιούμε γνωστές ταυτότητες όπως: $α^2+β^2=\left(α+β\right)^2-2αβ$, $α^3+β^3=\left(α+β\right)^3-3αβ\left(α+β\right)$,

$α^2-β^2=\left(α-β\right)\left(α+β\right)$, καθώς και γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Επίσης μπορούμε, αν στην παράσταση μετέχουν ημx και συνx,να θέσουμε $ημ^2x=α$ οπότε $συν^2x=1-α$ και προσπαθούμε ν'αποδείξουμε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του α.

Παράδειγμα 8

Ν'αποδείξετε ότι η παράσταση $A=3\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)-2\left(\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x\right)$ **είναι ανεξάρτητη του x (ή σταθερή).**

Λύση

1ος τρόπος

$$A=3\left[\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2-2\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\right]$$

$$-2\left[\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^3-3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right]=$$

$$=3\left(1^2-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-2\left(1^3-3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=3-6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x-2+6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x=1.$$

2ος τρόπος

Θέτουμε $\eta\mu^2 x=\alpha$ οπότε: $\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x=1-\alpha$.

Έχουμε:

$$A=3\left[\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]-2\left[\alpha^3+(1-\alpha)^3\right]=3\left(\alpha^2+1-2\alpha+\alpha^2\right)-2\left(\alpha^3+1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3\right)$$

$$=3\left(2\alpha^2-2\alpha+1\right)-2\left(1-3\alpha+3\alpha^2\right)=6\alpha^2-6\alpha+3-2+6\alpha-6\alpha^2=1$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα επόμενα:

α. $\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x=1$

β. $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

γ. $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu\omega$

δ. $\eta\mu^2 x=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

Λύση

α. Λ (διότι $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$)

β. Σ (διότι $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1$ και $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$)

γ. Σ (διότι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu\omega$)

δ. Λ (διότι $\eta\mu^2 x=\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$)

Άσκηση 2

Να επιλέξετε το σωστό στα παρακάτω:

α. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$ **είναι ίσο με : 1. ημω, 2. – συνω, 3. συνω**

β. $\varepsilon\varphi(\pi-\omega)$ **είναι ίση με: 1. εφω, 2. –εφω, 3. – σφω**

γ. $\sigma\upsilon\nu(2001\pi-\omega)$ **είναι ίσο με: 1. – συνω, 2. συνω, 3. – ημω**

Λύση

α. 3 **β.** 2 **γ.** 1

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε την παράσταση: $K=\dfrac{\varepsilon\varphi 420^{o}-\eta\mu 510^{o}-\eta\mu\left(-750^{o}\right)}{\eta\mu^{2}100^{o}+\sigma\upsilon\nu^{2}80^{o}+2\varepsilon\varphi 160^{o}\cdot\sigma\varphi 20^{o}}$

Λύση

Είναι $\varepsilon\varphi 420^{o}=\varepsilon\varphi\left(360^{o}+60^{o}\right)=\varepsilon\varphi 60^{o}=\sqrt{3}$

$$\eta\mu 510^{o}=\eta\mu\left(360^{o}+150^{o}\right)=\eta\mu 150^{o}=\eta\mu\left(90^{o}+60^{o}\right)=\sigma\upsilon\nu 60^{o}=\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\left(-750^{o}\right)=-\eta\mu 750^{o}=-\eta\mu\left(2\cdot 360^{o}+30^{o}\right)=-\eta\mu 30^{o}=-\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu^{2}100^{o}=\eta\mu^{2}\left(180^{o}-80^{o}\right)=\eta\mu^{2}80^{o}$$

$$\varepsilon\varphi 160^{o}=\varepsilon\varphi\left(180^{o}-20^{o}\right)=-\varepsilon\varphi 20^{o}$$

Έτσι έχουμε: $K=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\eta\mu^{2}80+\sigma\upsilon\nu^{2}80+2(-\varepsilon\varphi 20)\cdot\sigma\varphi 20}=\dfrac{\sqrt{3}}{1-2\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

Άσκηση 4

Ν'απλοποιήσετε την παράσταση $\Pi=\dfrac{\eta\mu\frac{13\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+3\varepsilon\varphi\frac{23\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu^{2}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\frac{19\pi}{3}}$

Λύση

Ισχύει $\eta\mu\frac{13\pi}{6}=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

Επίσης $\varepsilon\varphi\dfrac{23\pi}{4}=\varepsilon\varphi\left(6\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}=-1$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\dfrac{19\pi}{3}=\eta\mu\left(6\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Έτσι η παράσταση Π γίνεται: $\Pi=\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot(-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Άσκηση 5

Ν’αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K=\frac{\sigma\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\eta\mu\left(2\pi-\alpha\right)}-\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\alpha\right)+\eta\mu\left(\pi+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

είναι ανεξάρτητη του α.

Λύση

$\sigma\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\varepsilon\varphi\alpha$, $\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$,

$\eta\mu\left(2\pi-\alpha\right)=-\eta\mu\alpha$, $\eta\mu\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu\left(\pi+\alpha\right)=-\eta\mu\alpha$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\eta\mu\alpha$.

Έτσι η παράσταση Κ γίνεται: $K=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\left(-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}{-\eta\mu\alpha}-\left(-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)+\left(-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)+\left(-\eta\mu\alpha\right)+\eta\mu\alpha$

$$=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}+\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha=1 \text{ (ανεξάρτητη του α)}$$

Άσκηση 6

Ν'αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2 x\cdot \varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \sigma\varphi x+2\eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu x=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$ **.**

Λύση

Είναι $\eta\mu^2 x\cdot \varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \sigma\varphi x+2\eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu x=$

$$\eta\mu^2 x\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\sigma\upsilon\nu^2 x\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

$$=\frac{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x+2\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$$

Άσκηση 7

Αν $\sigma\varphi x=\sqrt{3}$ **και** $x\in\left(180^o,270^o\right)$ **να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

Λύση

Αφού $x\in\left(180^o,270^o\right)$ η τελική πλευρά της γωνίας x είναι στο ΙΙΙ τεταρτημόριο.

Άρα $\begin{cases}\eta\mu x<0\\ \sigma\upsilon\nu x<0\end{cases}$ (1). Τότε: $\varepsilon\varphi x=\dfrac{1}{\sigma\varphi x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Δηλαδή $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{1+\dfrac{3}{9}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{\dfrac{4}{3}}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και λόγω της (1) έχουμε $\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Είναι $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\eta\mu x=\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{2}$. Δηλαδή $\eta\mu x=-\dfrac{1}{2}$

Άσκηση 8

1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ν'αποδείξετε ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu B=-\sigma\upsilon\nu\left(A+\Gamma\right)$ **β.** $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}=\sigma\varphi\dfrac{B+\Gamma}{2}$

2. Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ν'αποδείξετε ότι:

α. $\eta\mu\left(A+\Gamma\right)=-\eta\mu\left(B+\Delta\right)$ **β.** $\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma+\Delta}{2}=0$

γ. $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{4}-\eta\mu\frac{\Gamma+\Delta}{4}=0$

Λύση

1 α. Ισχύει, $A+B+\Gamma=180^{o} \Leftrightarrow B=180^{o}-(A+\Gamma)$

Άρα $\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\left[180^{o}-(A+\Gamma)\right]=-\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)$

β. Είναι $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^{o} \Leftrightarrow \frac{A}{2}=90^{o}-\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)$.

Άρα $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\left[90^{o}-\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\right]=\sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}$

2 α. Είναι $A+B+\Gamma+\Delta=360^{o} \Leftrightarrow A+\Gamma=360-(B+\Delta)$

Άρα $\eta\mu(A+\Gamma)=\eta\mu\left[360^{o}-(B+\Delta)\right]=-\eta\mu(B+\Delta)$

β. Ισχύει, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}=180^{o} \Leftrightarrow \frac{A+B}{2}=180^{o}-\frac{\Gamma+\Delta}{2}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\left[180^{o}-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+\Delta}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+\Delta}{2}=0$

γ. Είναι $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{\Gamma}{4}+\frac{\Delta}{4}=90^{o} \Leftrightarrow \frac{A+B}{4}=90^{o}-\frac{\Gamma+\Delta}{4}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{4}=\sigma\upsilon\nu\left[90^{o}-\frac{\Gamma+\Delta}{4}\right] \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{4}=\eta\mu\frac{\Gamma+\Delta}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{4}-\eta\mu\frac{\Gamma+\Delta}{4}=0$

Άσκηση 9

Να αποδειχθεί η ισότητα: $6\varepsilon\varphi(\pi+x)+3\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2}-x\right)-43\varepsilon\varphi(21\pi-x)=52\varepsilon\varphi x$

Λύση

Είναι $\varepsilon\varphi(\pi+x)=\varepsilon\varphi x$.

$$\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(21\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$$

$\varepsilon\varphi(21\pi - x) = \varepsilon\varphi(20\pi + \pi - x) = \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$

Οπότε: $6\varepsilon\varphi x + 3\varepsilon\varphi x - 43(-\varepsilon\varphi x) = 52\varepsilon\varphi x$

Άσκηση 10

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{B+\Gamma}{2} = 1$

Λύση

Επειδή $A + B + \Gamma = \pi$ είναι $\frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \eta\mu\frac{A}{2}$.

Τότε: $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{A}{2} = 1$.

Άσκηση 11

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ$ **.**

Λύση

Είναι $\varepsilon\varphi 95^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 5^\circ) = -\sigma\varphi 5^\circ$ και $\varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 7^\circ) = -\sigma\varphi 7^\circ$

Οπότε: $A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi 5^\circ(-\sigma\varphi 5^0) \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ(-\sigma\varphi 7^\circ) = (-1)(-1) = 1$

Άσκηση 12

Να αποδειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$**,** $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**.**

Λύση

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$, $\varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x$, $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$

Οπότε: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$

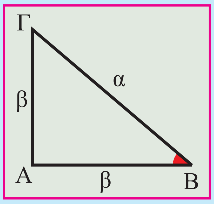
$\eta\mu x\varepsilon\varphi x \geq 4 + 5\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \geq 4 - 5\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \geq 4\sigma\upsilon\nu x - 5\sigma\upsilon\nu^2 x$

(η φορά της ανίσωσης παρέμεινε διότι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$)

$5\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Leftrightarrow$

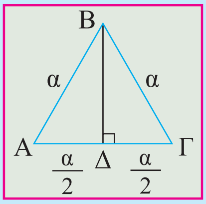
$4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ



1. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές β cm. Να υπολογίσετε:
α. Την υποτείνουσά του
β. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45^o και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$ημ45^o$	$συν45^o$	$εφ45^o$	$σφ45^o$



2. Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε τις γωνίες: **α.** 60^o και **β.** 30^o. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30^o και 60^o και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Γωνία α	$\mathbf{30^o}$	$\mathbf{60^o}$
ημα		
συνα		
εφα		
σφα		

3. Να μετατρέψετε τις μοίρες σε rad και αντίστροφα.

α. 3690^o **β.** $\frac{10π}{3}$ rad **γ.** 15 rad

4. Να υπολογίσετε:

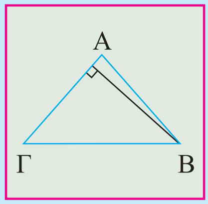
α. $ημ3090^o$ **β.** $συν(-2640^o)$ **γ.** $εφ\left(-\frac{185π}{6}\right)$ **δ.** $σφ\frac{85π}{4}$

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(Α = 90^o)$:
α. Δίνεται $συνΒ = 0,6$. Υπολογίστε: i. ημΒ, ii. εφΒ
β. Δίνεται $ημΒ = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Υπολογίστε: i. συνΒ, ii. εφΒ

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ στο οποίο $ΒΓ = 26$ cm και $\widehat{ΑΒΓ} = 47^o$. Υπολογίστε:
α. Την πλευρά ΑΒ,
β. Το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΓ.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ όπου $\hat{A} = 84^{o}$ και $AB = 50\ cm$. Υπολογίστε:

α. Την πλευρά ΑΒ, **β.** το ύψος ΑΗ.



8. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ.

	τεταρτημόριο τελικής πλευράς
$ημθ < 0$ και $συνθ > 0$	
$εφθ > 0$ και $συνθ > 0$	
$σφθ < 0$ και $συνθ < 0$	
$εφθ > 0$ και $συνθ < 0$	
$ημθ > 0$ και $εφθ > 0$	
$σφθ > 0$ και $ημθ < 0$	
$ημθ < 0$ και $εφθ < 0$	
$ημθ < 0$ και $συνθ > 0$	

9. Αν $0 < x < 90^{o}$ βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = συν(180^{o} - x) + σφ(90^{o} - x) - ημ(270^{o} - x)$$

10. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $συν^{2}0 + συν^{2}\frac{\pi}{6} + συν^{2}\frac{\pi}{4} + συν^{2}\frac{\pi}{3} + συν^{2}\frac{3\pi}{2}$

11. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α)-(στ) απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα **i.** έως και **iv.** .

α. $εφω = \frac{ημω}{συνω}$	**β.** $σφω = \frac{συνω}{ημω}$	**γ.** $εφω \cdot σφω = 1$
δ. $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{1+εφ^{2}ω}}$	**ε.** $ημω = \pm\frac{εφω}{\sqrt{1+εφ^{2}ω}}$	**στ.** $ημ^{2}ω + συν^{2}ω = 1$

i. α. $συνθ = 0,4$ όπου $0^{o} < θ < 90^{o}$. Υπολογίστε το ημθ και την εφθ.

β. $συνθ = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ όπου $180^{o} < θ < 270^{o}$. Υπολογίστε το ημθ και την εφθ.

ii. Εάν $ημy = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^o < y < 180^o$, υπολογίστε το συνy και την εφy.

iii. Εάν $εφθ = \dfrac{8}{15}$ και $180^o < θ < 270^o$, υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

iv. Να βρείτε τη γωνία θ, αν γνωρίζετε ότι $ημθ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{π}{2} \le θ \le \dfrac{3π}{2}$.

12. Αν $2εφθ - 3 = 0$ και $ημθ < 0$, να βρεθεί το συνθ.

13. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες x, α, β ισχύουν:

α. $(ημx - συνx)^2 = 1 - 2ημx \cdot συνx$

β. $ημ^4x - συν^4x = ημ^2x - συν^2x = 1 - 2συν^2x = 2ημ^2x - 1$

γ. $(1 + ημx + συνx)^2 = 2(1 + συνx)(1 + ημx)$

δ. $\dfrac{1 - εφ^2x}{1 + εφ^2x} = 1 - 2ημ^2x$

14. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α. $y = 2 + 3συνx$ **β.** $y = 5 + ημ^2x$ **γ.** $y = \dfrac{1}{2 - ημx}$

15. Αν $συνx - ημx = \sqrt{2}ημx$, τότε και $συνx + ημx = \sqrt{2}συνx$.

16. Αν $3ημθ + 5συνθ = 5$, τότε να δείξετε ότι: $(3ημθ - 5συνθ)^2 = 9$.

17. Να υπολογισθεί η παράσταση $Π = \dfrac{2εφ30^o - συν690^o + 2εφ\dfrac{41π}{6}}{2εφ405^o - 4ημ570}$

18. Να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{συν\left(\dfrac{π}{2} - x\right)}{σφ\left(\dfrac{3π}{2} + x\right)εφ\left(x - \dfrac{π}{2}\right) - συν^2(41π + x)} + \frac{ημ^2(x - π) + συν^2(21π + x)}{συν\left(\dfrac{81π}{2} - x\right)} = \frac{2}{ημx}$$

19. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν δίνονται:

α. $συνx = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

β. $ημx = \frac{\sqrt{5}}{3}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$

γ. $σφx = -\sqrt{3}$ και $\frac{83\pi}{2} < x < \frac{442\pi}{2}$

δ. $εφx = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $100\pi < x < \frac{201\pi}{2}$

20. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{σφ^2x - 1}{σφ^2x + 1} = 2συν^2x - 1$

β. $συν^2α\left(1 + εφ^2α\right) + ημ^2α\left(1 + σφ^2α\right) = 2$

γ. $1 - \frac{ημ^2x}{1 + συνx} = συνx$

δ. $\frac{ημx}{1 + συνx} + σφx = \frac{1}{ημx}$

21. Να εξετάσετε αν υπάρχει x για το οποίο:

α. να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{1}{5}$ και $συνx = \frac{1}{5}$

β. να ισχύει συγχρόνως $ημ^4x = \frac{1}{16}$ και $συν^6x = \frac{1}{64}$

22. Ν'αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = ημ^2\left(x - 180\right) + συν300 - συν\left(180 - x\right)συν\left(360 - x\right) +$$

$$+ημ1590^{o} + 8ημ^2y + 2ημ^2\left(90 - y\right) + 6συν^2y$$ είναι σταθερή.

23. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{ημ\left(-x\right) \cdot εφ\left(5\pi + x\right)συν\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot σφ\left(2\pi - x\right)}{συν\left(3\pi - x\right)εφ\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot ημ\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)}$$

$$B = \frac{ημ\left(\pi - x\right) \cdot συν\left(2\pi + x\right) \cdot σφ\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{εφ\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)συν\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot ημ\left(\pi + x\right)}$$

Ν'αποδείξετε ότι $A = B^3$.

24. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\dfrac{\eta\mu(3\pi+\alpha)\sigma\varphi(7\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(3\pi+\alpha)\sigma\varphi(4\pi+\alpha)\eta\mu\alpha}$

25. Να εκφράσετε συναρτήσει του συνx και του ημx την παράσταση:

$$A=\sigma\upsilon\nu(-x)+\eta\mu(-x)+\eta\mu(\pi+x)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$$

26. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 560^{o}\,\eta\mu 140^{o}-\eta\mu 680^{o}\,\sigma\upsilon\nu 380^{o}=0$

27. Δίνεται ότι: $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

α. Να υπολογίσετε : **i.** $\eta\mu\dfrac{\pi}{5}$ και **ii.** $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{5}$

β. Από τα $\eta\mu\dfrac{\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}$, να υπολογισθούν:

i. $\eta\mu\dfrac{4\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{5}$, **ii.** $\eta\mu\dfrac{6\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{5}$.

28. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=\eta\mu(x-y)\sigma\upsilon\nu(y-x)+\eta\mu(y-x)\sigma\upsilon\nu(x-y)$$

29. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

α. $\eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)$ **β.** $\eta\mu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2(A+\Gamma)=1$

30. Αποδείξτε ότι: $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

31. Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

α. $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **β.** $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^3 x$ **γ.** $\sqrt{1-\eta\mu x}\cdot\sqrt{1+\eta\mu x}$

32. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^4 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x-\eta\mu^2 x}$ **β.** $\dfrac{\eta\mu^2 x-\eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 y}$

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αποδείξτε ότι:

α. **i.** $\eta\mu\dfrac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}$ **ii.** $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}=\sigma\varphi\dfrac{B+\Gamma}{2}$

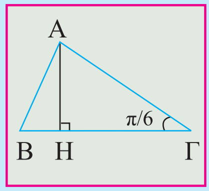
iii. $\eta\mu\dfrac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}$ **iv.** $\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}=\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$

β. Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του α ερωτήματος, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

i. $\eta\mu\dfrac{A}{2}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}$ **ii.** $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{B+\Gamma}{2}$ **iii.** $\eta\mu^2\dfrac{A}{2}-\eta\mu^2\dfrac{B+\Gamma}{2}$

34. Ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(AB=A\Gamma=\alpha)$ η γωνία της κορυφής Α έχει σε ακτίνια μέτρο θ. Αποδείξτε ότι η βάση $B\Gamma=2\alpha\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$.

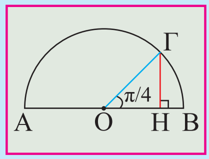
35. Στο διπλανό σχήμα είναι: $BH=1$ m και $\Gamma H=3$ m. Ποια είναι η ακριβής τιμή της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ;



36. Στο διπλανό σχήμα είναι $OA=AB=O\Gamma=1$ m και $B\hat{O}\Gamma=\pi/4$ rad.

α. Υπολογίστε την ΟΗ και την ΑΗ και στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(B\hat{A}\Gamma\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2A\Gamma}\quad(1)$$



β. Βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΓΒ και στη συνέχεια δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu\left(B\hat{A}\Gamma\right)=\dfrac{A\Gamma}{2}$ (2)

γ. Αποδείξτε ότι: **i.** $B\hat{A}\Gamma=\dfrac{\pi}{8}$ rad και **ii.** $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

37. Ν' αποδείξετε ότι $\sqrt{2\varepsilon\varphi x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=-1+\varepsilon\varphi x$ με $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

38. Αν συνx-ημx = $\sqrt{2}$ημx ν' αποδείξετε οτι $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

39. Αν $3\eta\mu x+4\sigma\upsilon\nu x=5$ και $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ν' αποδείξετε οτι $\varepsilon\varphi x=\dfrac{3}{4}$

(**Υπ:** Λύνουμε ως προς ημx και $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 x\ =1$)

40. Αν $3\eta\mu x + 5\ \sigma\upsilon\nu x = 5$ ν' αποδείξετε οτι $(3\sigma\upsilon\nu x - 5\eta\mu x)^2 = 9$

(**Υπ:** $(3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x)^2 = 5^2$ κ.τ.λ)

41. Αν $\nu \in N^*$ ν' αποδείξετε οτι $(-1)^\nu \sigma\upsilon\nu x\left[(2\nu+1)\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \eta\mu\alpha$

Ε. **"ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και τέτοιο ώστε $B\Gamma = 2\alpha$ και $B = \frac{\pi}{8}$ rad .

α. Εάν Ο το μέσο της ΒΓ και ΑΗ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ:

i. Αποδείξτε ότι $A\hat{O}H = \frac{\pi}{4}$ rad .

ii. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα δικαιολογήστε γιατί

$$AH = OH = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

iii. Στη συνέχεια δείξτε ότι: $AB = \alpha\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

β. Με τη βοήθεια του τριγώνου ΑΗΒ υπολογίστε: το $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ και το $\eta\mu\frac{\pi}{8}$.