1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ
Ορθές προβολές - Πυθαγόρειο θεώρημα

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α. Να αποδείξετε ότι: “Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα”.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά ώστε να εκφράζεται γνωστό θεώρημα.
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το .... του ύψους που αντιστοιχεί .... είναι ίσο με το .... των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

Β. α. Αν ΑΜ, ΑΡ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μια διάμετρο ΑΒ του κύκλου, τότε $\frac{ΑΓ^2}{ΑΔ^2}=\frac{ΑΜ}{ΑΡ}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του. Αν ισχύει ΑΒ = 3ΑΓ να δείξετε ότι: ΔΒ = 9ΑΓ.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Επιλέξτε την σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.
Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8.

α. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΒΓ είναι ίση με:

i) 3 **ii)** 3,6 **iii)** 2 **iv)** 2,5 **v)** 1

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. Το ύψος ΑΔ είναι ίσο με:

i) 4,8 **ii)** 3,5 **iii)** 1,5 **iv)** 1,3 **v)** 2,8

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

Β. **α.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

i) Αν ΑΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ$ τότε $\hat{Α} = 90°$.

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

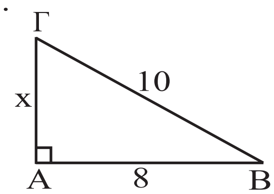
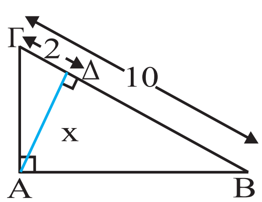
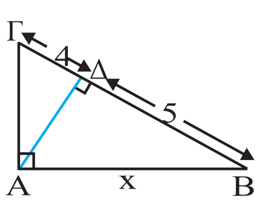
ii) Η παρακάτω τριάδα αριθμών $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ αποτελεί μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

iii) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν ισχύουν $ΑΔ \perp ΒΓ$ και $ΔΕ \perp ΑΒ$ τότε ισχύει και $ΔΓ \cdot ΔΒ = ΑΕ \cdot ΑΒ$.

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. Σε κάθε άγνωστο τμήμα της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το γράμμα της στήλης Β που εκφράζει το μήκος του.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>1.
</td><td>α. $3\sqrt{2}$
β. 4</td></tr>
<tr><td>2.
</td><td>γ. $3\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>3.
</td><td>δ. 6
στ. 1</td></tr>
</table>

1	2	3

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4MN^2$.

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

Β. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια ακτίνα του ΟΑ. Αν μια χορδή του ΒΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο σημείο Δ και ΟΔ = κ να δείξετε:

α. $B\Gamma^2 = 4(R - \kappa) \cdot (R+\kappa)$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. $A\Gamma^2 = 2R\,(R - \kappa)$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω ότι ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου έχει διαστάσεις ΑΒ = α και ΒΓ = $\alpha\sqrt{2}$. Η Νομαρχία αγοράζει το οικόπεδο και δημιουργεί ένα πεζόδρομο που ενώνει τα σημεία Β και Δ. Στα σημεία Α και Γ υπάρχουν δύο σπίτια τα οποία για να επικοινωνούν σύντομα με τον πεζόδρομο ανοίγονται δύο δρόμοι οι οποίοι διασταυρώνονται κάθετα με αυτόν στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα.

α. Να εκφράσετε το μήκος του πεζόδρομου ΒΔ συνάρτησει του α.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

β. Να δείξετε ότι ο πεζόδρομος χωρίστηκε σε τρία ίσα μέρη από τα σημεία Η και Θ.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

γ. Η Νομαρχία για τις ανάγκες του οικισμού αποφασίζει να επεκτείνει το δρόμο ΘΓ που θα ενώνεται με τον δρόμο ΑΔ στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι το σημείο Μ είναι μέσο της ΑΔ.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

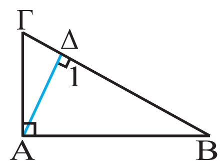
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

1ο. Α. α. Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν:
1. Δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια.
2. Τις πλευρές τους ανάλογες μια προς μια.
3. Δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Α.

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες
($\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = 90^{o}$ και $\hat{B}$ κοινή).



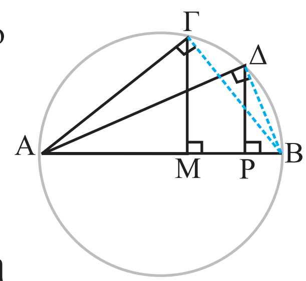
Συνεπώς $\dfrac{B\Gamma}{AB} = \dfrac{AB}{\Delta B} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot \Delta B$

β. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

1ο Β. α. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Β.

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
$A\Gamma^2 = AM \cdot AB$ (1)
Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει:
$A\Delta^2 = AP \cdot AB$ (2).
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:



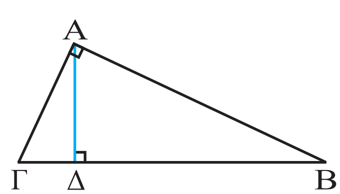
$$\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2} = \frac{AM \cdot AB}{AP \cdot AB} = \frac{AM}{AP}.$$

1ο Β. β. Ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου,είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.

β. Από υπόθεση έχουμε: $\dfrac{AB}{A\Gamma} = 3$.

Όμως $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2} = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow$

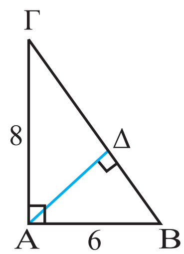
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{AB}{A\Gamma}\right)^2 = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow 3^2 = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \Delta B = 9\Delta\Gamma$

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α.



α. Σωστό είναι το ii).

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ΒΓ^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow ΒΓ = 10$

$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ΔΒ = \dfrac{ΑΒ^2}{ΒΓ} \Leftrightarrow ΔΒ = 3{,}6$

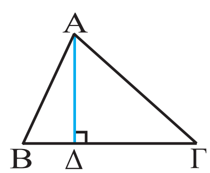
β. Σωστό είναι το i)

$ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ \Leftrightarrow ΔΓ = 6{,}4.$

$ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 \Leftrightarrow ΑΔ = 4{,}8.$

Β.

α.



i) (Σ). Διότι από υπόθεση προκύπτει $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{ΔΒ}{ΑΒ}$. Επιπλέον τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ έχουν και τη $\hat{Β}$ κοινή.

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα $\hat{Α} = Α\hat{Δ}Β = 90^\circ$.

ii) (Λ). Η τριάδα $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ αποτελεί μήκη πλευρών τριγώνου αφού ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, όμως το τρίγωνο που δημιουργείται δεν είναι ορθογώνιο αφού δεν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

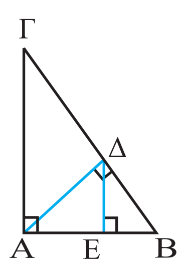
$$\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 \neq \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{4}\right)^2 \Leftrightarrow 5 \neq 3 + 4 \Leftrightarrow 5 \neq 7\right).$$

iii) (Σ). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$ΑΔ^2 = ΔΓ \cdot ΔΒ$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει: $ΑΔ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $ΔΓ \cdot ΔΒ = ΑΕ \cdot ΑΒ$.



β.

1	2	3
δ	β	γ

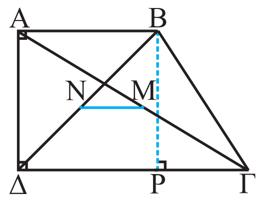
2ο Β. α. ii) Για να αποδείξουμε ότι τα α, β, γ αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου, αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η τριάδα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα:
$β - γ < α < β + γ,\ β \geq γ$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

3ο. Α. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

Α.

Έστω $ΒΡ \perp ΔΓ$. Το τετράπλευρο ΑΒΡΔ είναι ορθογώνιο.



Από το σχήμα έχουμε:
$ΡΓ = ΔΓ - ΔΡ \Leftrightarrow ΡΓ = ΔΓ - ΑΒ$.
Επίσης:

$$ΝΜ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΝΜ = \frac{ΡΓ}{2} \Leftrightarrow ΡΓ = 2ΝΜ \Leftrightarrow$$

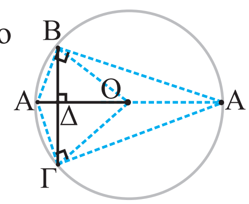
$$\Leftrightarrow ΡΓ^2 = 4ΜΝ^2.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΡΓ έχουμε: $ΒΓ^2 - ΒΡ^2 = ΡΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 - ΑΔ^2 = 4ΜΝ^2$.

3ο Β. α. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο το ύψος του είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Β.

α. Στο τρίγωνο ΒΟΓ η ΟΔ είναι διάμεσος άρα $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΑ΄ ισχύει:



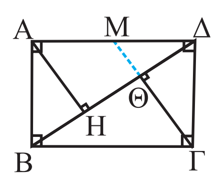
$$ΒΔ^2 = ΑΔ \cdot ΔΑ΄ \Leftrightarrow \left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2$$

$$= (R - κ) \cdot (R + κ) \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 4(R - κ) \cdot (R + κ).$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΑ΄ ισχύει:
$ΑΓ^2 = ΑΔ \cdot ΑΑ΄ \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 2R \cdot (R - κ)$.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι:



$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow$$

$$ΒΔ^2 = α^2 + \left(α\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$ΒΔ^2 = 3α^2 \Leftrightarrow ΒΔ = α\sqrt{3}$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει:

$$ΑΒ^2 = ΒΗ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow ΒΗ = \frac{α^2}{α\sqrt{3}} \Leftrightarrow ΒΗ = \frac{α\sqrt{3}}{3}$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει:

$$ΔΓ^2 = ΔΘ \cdot ΔΒ \Leftrightarrow ΔΘ = \frac{α\sqrt{3}}{3}.$$

Από το σχήμα έχουμε:

$$ΗΘ = ΒΔ – ΒΗ – ΘΔ \Leftrightarrow ΗΘ = \frac{α\sqrt{3}}{3}$$

Δηλαδή ΒΗ = ΗΘ = ΘΔ

γ. Στο τρίγωνο ΑΗΔ το Θ είναι μέσο της ΗΔ και ΘΜ//ΑΗ (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ΒΔ). Άρα το σημείο Μ είναι μέσο της ΑΔ.

4ο. γ. Αν σε ένα τρίγωνο από το μέσο μιας πλευράς του φέρουμε παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς.