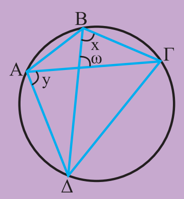
1ο Κεφάλαιο

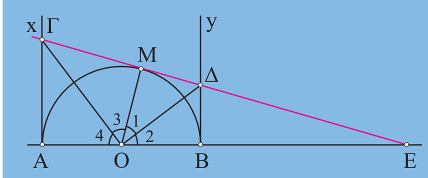
1ο μάθημα

Εγγεγραμμένα σχήματα



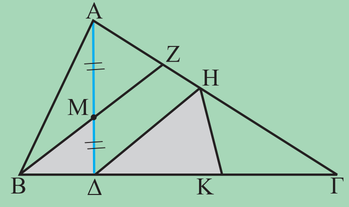
2ο μάθημα

Αναλογίες



3ο μάθημα

Ομοιότητα



Μάθημα 1 — Εγγεγραμμένα σχήματα

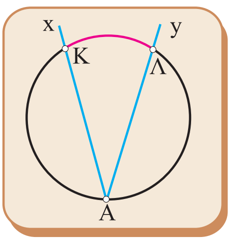
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Σκοπός του μαθήματος είναι να δώσει στους μαθητές συνοπτικά τις απαραίτητες γνώσεις από τη διδακτέα ύλη της Α΄λυκείου που δεν διδάχθηκε ή διδάχθηκε περιληπτικά.

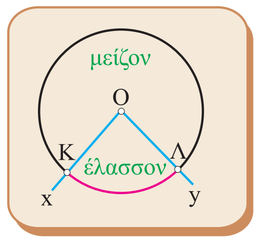
Εγγεγραμμένη γωνία

Ορισμός

Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη σε κύκλο**, όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



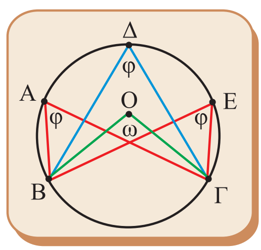
Μια γωνία, της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **επίκεντρη**.
Σε κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχίζουμε ένα από τα δύο τόξα (βλ. σχήμα) του κύκλου με άκρα Κ και Λ το οποίο ονομάζουμε **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε τότε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{ΚΛ}$.



Αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θα θεωρούμε στα επόμενα ότι οι γωνίες βαίνουν στο έλασσον τόξο (κυρτές γωνίες). Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.

Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης (δηλαδή της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο π.χ. στο διπλανό σχήμα είναι ω = 2φ.
Σε κάθε τόξο μπορεί να βαίνει μια μόνο επίκεντρη γωνία, όμως σε αυτό μπορούν να βαίνουν άπειρες εγγεγραμμένες.

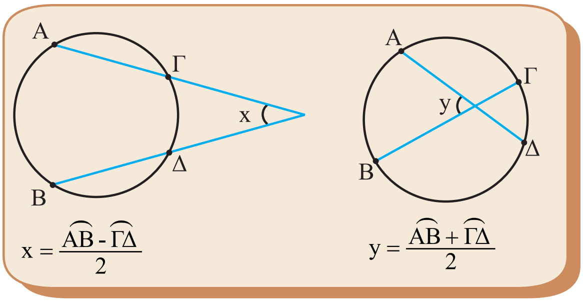


Πορίσματα

α. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τόξου.
β. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

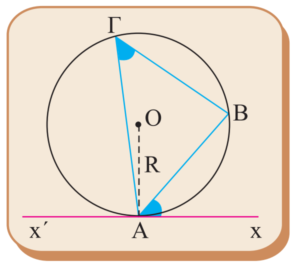
γ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, ίσων κύκλων είναι ίσες.
δ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές.

Γωνία δύο τεμνουσών



Γωνία χορδής και εφαπτομένης

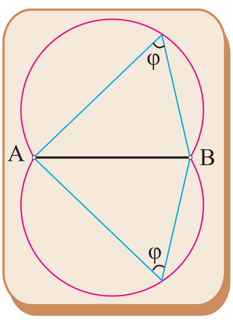
Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε χορδή AB και την εφαπτομένη στο σημείο A, την x´Ax. Κάθε μία από τις γωνίες BAx και BAx´ λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.
Η οξεία γωνία BAx λέγεται γωνία της χορδής AB και του κύκλου (O,R) .
Το τόξο AB που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας χορδής και εφαπτομένης λέγεται **αντίστοιχο τόξο της γωνίας αυτής**.



Η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής.

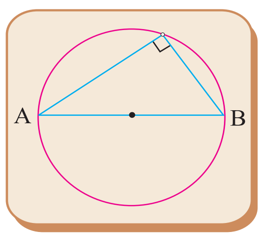
Βασικός Γεωμετρικός Τόπος

Ολές οι εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Οι κορυφές των γωνιών αυτών “βλέπουν τη χορδή του τόξου με ίσες γωνίες”. Λέμε λοιπόν ότι:



Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία $\hat{\varphi}$ είναι δύο τόξα κύκλων συμμετρικά ως προς την AB. Από τα τόξα εξαιρούνται τα σημεία A και B.

Πόρισμα
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος διαμέτρου AB. Εξαιρούνται τα άκρα A και B του τμήματος.

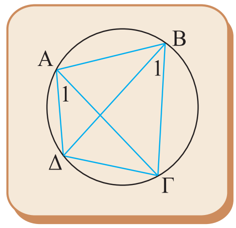


Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος, που διέρχεται από τις κορυφές του.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:

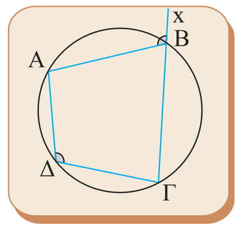


α. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

$\left(\hat{A}+\hat{\Gamma}=180^{o} \quad \text{και} \quad \hat{B}+\hat{\Delta}=180^{o}\right)$

β. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες, π.χ. $\left(\hat{A}_1=\hat{B}_1\right)$

γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

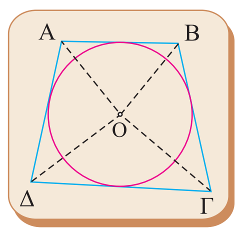


> **Θεώρημα (Κριτήριο)**
> Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:
> **α.** Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
> **β.** Μια πλευρά του “φαίνεται” από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.
> **γ.** Μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, αν όλες οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.
Σε κάθε περιγγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύουν οι ιδιότητες:

α. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του.

> **Θεώρημα (Κριτήριο)**
> Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν:
> **α.** Οι διχοτόμοι τριών τουλάχιστον γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
> **β.** Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

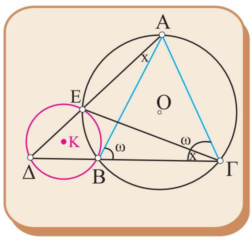
Η Αναλυτική Μέθοδος (Πλάτωνας 430 - 347 π. Χ.)

Οι αποδεικτικές μέθοδοι - συνθετική μέθοδος, η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο και η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής και της τέλειας επαγωγής - είναι γνωστές από την Άλγεβρα και χρησιμοποιούνται και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων.
Οι παραπάνω μέθοδοι δεν μας δίνουν ικανοποιητικά στοιχεία για το πως βρέθηκε η απόδειξη μιας πρότασης. Γι' αυτό ακολουθούμε την επόμενη σειρά συλλογισμών που λέγεται **ανάλυση**.
Δεχόμαστε ότι το πρόβλημα ή η ζητούμενη πρόταση αληθεύει και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά με τη βοήθεια γνωστών προτάσεων και θεωρημάτων μέχρι να καταλήξουμε σε μία αληθινή πρόταση ή σε μία πρόταση που δίνεται στην υπόθεση του προβλήματος.
Δηλαδή:
Έστω ότι η ζητούμενη πρόταση είναι η **Π**.
Δεχόμαστε ότι η **Π** είναι αληθινή και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά στις προτάσεις $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$, όπου η τελευταία πρόταση Π_ν είναι αληθινή ή δοσμένη στην υπόθεση του προβλήματος.
Οι παραπάνω προτάσεις είναι οι προτάσεις της ανάλυσης και διατυπωμένες με αντίστροφη σειρά αποτελούν τη σύνθεση.
Η λύση ενός προβλήματος παρουσιάζεται (διατυπώνεται) σχεδόν πάντοτε με τη σύνθεση.

Παράδειγμα 1

Στον κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ και φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε.

Λύση



Διατυπώνουμε τις προτάσεις της ανάλυσης:

Π : Δεχόμαστε ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Π_1 : $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΕΒΑ}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

Π_2 : $\widehat{ΕΒΑ} = \widehat{ΕΓΑ}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ)

Π_3 : $\widehat{ΕΓΑ} = ω - x$ (βλ. σχήμα)

Π_4 : $\widehat{ΑΔΒ} = ω - x$ (διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ)

Οι παραπάνω προτάσεις μας οδηγούν στη διατύπωση της λύσης η οποία είναι:

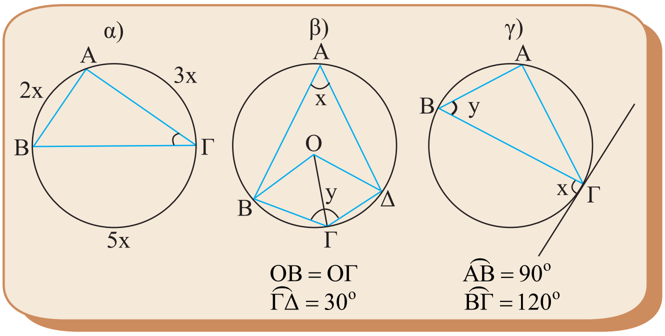
$\widehat{ΑΔΒ} = ω - x$, διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ και $\widehat{ΕΓΑ} = ω - x$

οπότε $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΕΓΑ}$ και $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΕΒΑ}$, που σημαίνει ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y (όπου x, y γωνίες ή τόξα ανάλογα).



Λύση

α. Τα άθροισμα των τόξων του κύκλου είναι:

$2x + 3x + 5x = 360^o$. Άρα $10x = 360$, οπότε $x = 36^o$.

Έτσι έχουμε $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot 36 = 72^o$ και $y = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{72^o}{2} = 36^o$

β. Φέρνουμε την ΟΓ και παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο ($OA = OB = B\Gamma = R$, R είναι η ακτίνα του κύκλου).

Είναι $\widehat{BO\Gamma} = 60^o$, οπότε και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^o$.

Από την υπόθεση είναι $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60^o + 30^o = 90^o$. Άρα $\hat{x} = 45^o$.

Το τόξο $\overset{\frown}{BA\Delta}$ είναι $360^o - 90^o = 270^o$. Άρα $\hat{y} = \widehat{B\Gamma\Delta} = \dfrac{270^o}{2} = 135^o$

γ. Ισχύει $\widehat{BA\Gamma} = \hat{x}$ διότι η $\hat{x}$ είναι γωνία υπο χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο που ορίζει η χορδή ΒΓ.

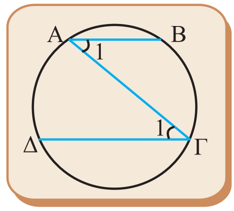
Όμως $\widehat{BA\Gamma} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$, οπότε $\hat{x} = 60^o$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$. Όμως $\hat{A} = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$.

Άρα $60^o + \hat{B} + 45^o = 180^o$ οπότε $\hat{y} = \hat{B} = 75^o$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι τα τόξα που περιέχονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες είναι ίσα.



Λύση

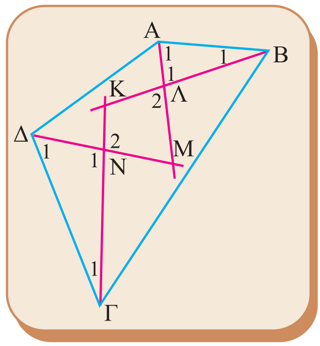
Έστω ΑΒ, ΓΔ, δύο παράλληλες χορδές ενός κύκλου. Φέρνουμε τη χορδή ΑΓ. Τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνομένων από την ΑΓ. Όμως σε ίσες εγγεγραμμένες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$

Άσκηση 3

Δείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, τεμνόμενες ανα δύο σε διαφορετικά σημεία σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Λύση

Έστω ΑΛ, ΒΛ, ΓΝ, ΔΝ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$, αντίστοιχα.



Στο τρίγωνο ΑΒΛ ισχύει $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Lambda}_1 = 180^o$ (1).

Στο τρίγωνο ΓΔΝ ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{N}_1 = 180^o$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$.

Άρα $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{\Gamma}{2} + \dfrac{\Delta}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$

ή $\dfrac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$.

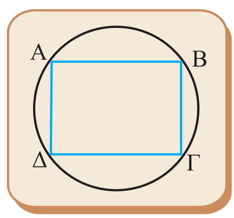
Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$. Άρα $\dfrac{360^o}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 180^o$.

Άρα $\hat{\Lambda}_2 + \hat{N}_2 = 180^o$. Έτσι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές οπότε είναι εγγράψιμο.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Λύση



Αρκεί να δείξουμε ότι μία γωνία του είναι ορθή. Ξέρουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, οπότε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (1). Επίσης σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $2\hat{A} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$.

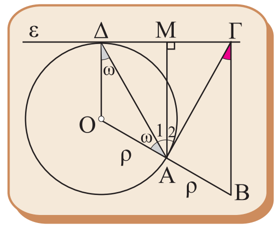
Έτσι δείξαμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 5

Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ κύκλου (Ο, ρ), παίρνουμε τμήμα ΑΒ = ΟΑ και φέρνουμε τη ΒΓ κάθετη σε τυχαία εφαπτομένη ε του κύκλου. Να δειχθεί ότι:

$$\widehat{O A \Gamma} = 3 \cdot \widehat{A \Gamma B}$$

Λύση



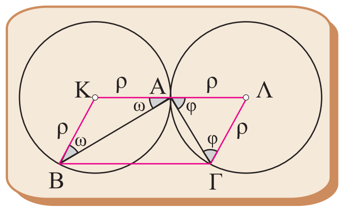
Έστω Δ είναι το σημείο επαφής της ευθείας ε και του κύκλου (Ο,ρ). Το ΟΔΓΒ είναι τραπέζιο. Φέρνουμε την $AM \perp \varepsilon$. Η ΑΜ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΟΔΓΒ. Το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές (ΑΜ ύψος και διάμεσος). ΄Αρα $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A\Gamma B}$ (εντός εναλλάξ).

Ακόμα $\widehat{O\Delta A} = \hat{\omega} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Επομένως, $\widehat{OA\Gamma} = 3\hat{\omega} = 3 \cdot \widehat{A\Gamma B}$

Άσκηση 6

Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε μία χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ,ρ) και τη χορδή $A\Gamma \perp AB$ του κύκλου (Λ,ρ). Να δειχθεί ότι: $B\Gamma \,//=\, K\Lambda$

Λύση



Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΑΛΓ είναι ισοσκελή. Επειδή:

$\widehat{BA\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow$

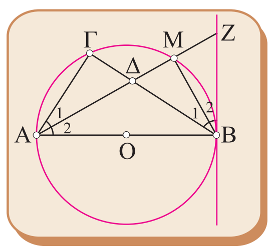
$\hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^o \Leftrightarrow KB \,//\, \Gamma\Lambda$

Είναι ακόμα $KB = \Lambda\Gamma = \rho$. Συνεπώς το ΚΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $B\Gamma \,//=\, K\Lambda$.

Άσκηση 7

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τη διάμετρο ΑΒ, τη χορδή ΑΓ και τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και την ΒΓ στο Δ. Αν η ΑΜ τέμνει στο σημείο Ζ την εφαπτομένη του κύκλου στο Β, να δειχθεί ότι: ΔΜ = ΜΖ.

Λύση



Είναι $\widehat{B_2} = \widehat{A_2}$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη)

Είναι $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (εγγεγραμμένες στο $\widehat{\Gamma M}$) και $\widehat{AMB} = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)

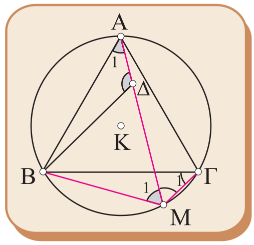
Επειδή $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Άρα το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές (ΒΜ ύψος και διχοτόμος).
Επομένως η ΒΜ είναι διάμεσος, οπότε $\Delta M = MZ$.

Άσκηση 8

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, ο περιγγεγραμμένος κύκλος του (K,R) και τυχαίο σημείο M του τόξου ΒΓ. Να δειχθεί ότι: $MA = MB + M\Gamma$

Λύση



Παίρνουμε στη ΜΑ τμήμα $M\Delta = MB$. Το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισόπλευρο (ισοσκελές και $\widehat{M_1} = 60^o$). Επομένως $\widehat{\Delta_1} = 120^o$.

Είναι τρίγωνο ΑΒΔ = τρίγωνο ΒΜΓ διότι:

$$AB = B\Gamma, \quad \widehat{BM\Gamma} = \widehat{\Delta_1} = 120^o, \quad \widehat{\Gamma_1} = \widehat{A_1}$$

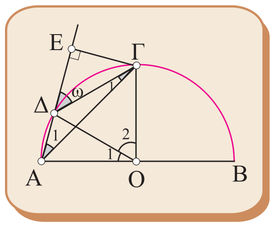
Επομένως $A\Delta = M\Gamma$. Είναι $M\Delta = MB$ και $A\Delta = M\Gamma$.

Άρα $M\Delta + A\Delta = MB + M\Gamma$ ή $MA = MB + M\Gamma$

Άσκηση 9

Το σημείο Γ είναι μέσο ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ. Αν Δ σημείο του τόξου ΑΓ και Ε η προβολή του Γ στην ευθεία ΑΔ, να δειχθεί ότι: $\Gamma E = E\Delta$.

Λύση



Αν Ο μέσον του ΑΒ, τότε είναι $\widehat{AO\Gamma} = 90^o$.

Από το τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε: $\hat{\omega} = \widehat{A_1} + \widehat{\Gamma_1}$. Επειδή $\widehat{A_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{O_2}$

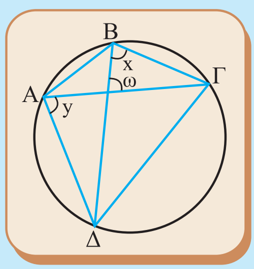
και $\widehat{\Gamma_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{O_1}$ (Η εγγεγραμμένη είναι ίση με τη μισή αντίστοιχη επίκεντρη), έχουμε:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}\widehat{O_2} + \frac{1}{2}\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{O_2} + \widehat{O_1}\right) = \frac{1}{2}\widehat{AO\Gamma_1} = \frac{1}{2}90^o$$

Άρα $\hat{\omega} = 45^o$. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι και ισοσκελές και επομένως $\Gamma E = E\Delta$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνονται: $\widehat{BA\Gamma} = 35^o$, $AB = 60^o$ και $\widehat{A\Gamma\Delta} = 40^o$.
Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστές) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.



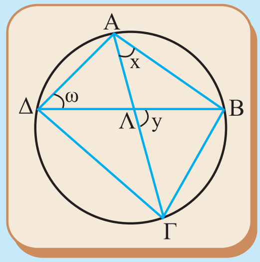
α. $\widehat{B\Gamma} = 35^o$ **β.** $\widehat{\Gamma\Delta} = 150^o$ **γ.** $\hat{\omega} = 70^o$

δ. $\hat{x} = \hat{y}$ **ε.** $\hat{x} = 75^o$

2. Στο διπλανό σχήμα είναι:

$\widehat{Α\Delta} = 80^o$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^o$, $\hat{y} = 70^o$

Να βρείτε τις γωνίες $\hat{x}$ και $\hat{\omega}$.



3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΑΕ και τη διάμεσο ΑΟΚ. Να δείξετε ότι $\widehat{\Delta AK} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

(**Υπ:** Φέρνουμε την ΓΚ και δείχνουμε ότι $\widehat{AK\Gamma} = \hat{B}$ και $\widehat{BA\Delta} = \widehat{KA\Gamma}$)

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΖ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι εγγράψιμο.

(**Υπ:** $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{\Gamma ZB} = 90^o$)

5. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλο στα Δ και Δ΄. Να δείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄

(**Υπ:** Δείξτε ότι σχηματίζονται εντός εκτός και επι τ'αυτά γωνίες ίσες)

6. Σε κύκλο κέντρου Ο δίνεται η διάμετρος ΑΒ. Φέρνουμε την ακτίνα $O\Gamma \perp AB$ και τυχαία χορδή ΓΔ, που τέμνει την ΟΒ στο Ε. Αν η εφαπτομένη στο Δ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ισοσκελές.

7. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΚΓ και ΑΛΔ και τις χορδές ΓΖ//ΔΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

8. Δίνονται οι κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Ο,ρ), που τέμνονται στο Ι. Ονομάζουμε Ν και Ρ τα μέσα των χορδών ΑΔ και ΓΒ. Να δειχθεί:

α. $IM \perp B\Gamma$ και $IP \perp A\Delta$,

β. $OM = \Gamma B / 2$ και $OP = A\Delta / 2$

9. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΔ και τόξο κύκλου (Α, ΑΔ) μέσα στο τετράγωνο. Φέρνουμε από το Α ευθεία ε, που τέμνει το ημικύκλιο στο Ε και το τόξο στο Ζ. Αν $ZK \perp \Delta\Gamma$, να δειχθεί ότι: $EZ = ZK$

10. Στον κύκλο με κέντρο Ο, παίρνουμε τη διάμετρο ΑΒ και την ακτίνα $O\Gamma \perp AB$. Στις προεκτάσεις της διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ. Οι ΓΔ και ΓΕ, τέμνουν το κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

α. ΖΔ = ΗΕ **β.** ΖΗ // ΔΕ

11. Οι κορυφές τραπεζίου (ΑΒ//ΔΓ) είναι σημεία του κύκλου (Κ,ρ). Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία Α και Γ, είναι ίση με τη γωνία των ευθειών ΑΔ και ΒΓ.

12. Σε κύκλο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ, παίρνουμε σημείο Γ της ΑΒ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους τα ΑΓ και ΓΒ. Ευθεία ε περνάει από το Γ και τέμνει τους τρεις κύκλους κατά σειρά στα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η. Να δειχθεί ότι: ΔΕ = ΖΗ

13. Από τυχαίο σημείο του περιγγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου φέρνουμε τις κάθετες στις τρεις πλευρές του. Να δειχθεί ότι τα ίχνη των τριών καθέτων βρίσκονται σε ευθεία γραμμή (ευθεία Simson).

14. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Β και Δ. Ευθεία, που περνάει από το Β τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α και Γ. Οι ευθείες ΑΔ και ΓΔ τέμνουν αντίστοιχα τους κύκλους στα Ε και Ζ και οι ευθείες ΑΖ, ΓΕ, τέμνονται στο Η. Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

15. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}\ \left(\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{o}}\right)$ ονομάζουμε ρ την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Να δειχθεί ότι: $\beta + \gamma = 2\rho + \alpha$

16. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Φέρνουμε την εφαπτομένη Αx και ευθεία ε // Αx, που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΑΒ στο Ε. Να δειχθεί ότι το ΒΓΔΕ είναι εγγράψιμο.

17. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Φέρνουμε τις $\Gamma Z \perp B\Delta$ και $BE \perp A\Gamma$. Να δειχθεί ότι ΖΕ // ΑΔ.

18. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), φέρνουμε το ύψος ΑΑ΄, το ορθόκεντρο Η και το μέσο Κ του τμήματος ΑΗ. Ο κύκλος (Κ, ΚΑ) τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να δειχθεί ότι η Α΄Ζ είναι εφαπτόμενη του (Κ, ΚΑ)

19. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β, φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλο στα Δ και Δ΄. Να δειχθεί ότι ΓΓ΄//Δ΄.

20. Στο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο κύκλους, που περνάνε από τις κορυφές του Β και Γ και τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ο ένας στα σημεία Ε, Ζ και ο άλλος στα σημεία Ε΄ και Ζ΄. Να δείξετε ότι ΕΖ // Ε΄Ζ΄.

21. Το σημείο Μ είναι το μέσο ενός κυρτογώνιου τόξου ΑΒ και Γ, Δ είναι δύο σημεία του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΒ κύκλου (Ο, ρ). Οι χορδές ΜΓ και ΜΔ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Κ και Λ, Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΚΛΔ είναι εγγράψιμο.

22. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (μη περιγράψιμο) ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ρ, τα σημεία όπου τέμνονται οι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών του. Να δειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.

23. Σε γωνία $\widehat{xOy}$ παίρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και το εσωτερικό της σημείο Ρ της $\widehat{\Delta Oy}$.
Αν Α, Β, Γ είναι οι προβολές του Ρ στις ημιευθείες ΟΔ, Οx, Oy, να δειχθεί ότι:
α. Τα σημεία Ο, Β, Α, Ρ, Γ είναι ομοκυκλικά **β.** ΑΒ = ΑΓ

24. Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ στο Ζ. Η διχοτόμος της γωνίας Ε, τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Κ, Μ και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ, στα Λ, Ρ. Να δείξετε ότι:
α. Οι διχοτόμοι των Ε και Ζ τέμνονται κάθετα
β. Το τετράπλευρο ΚΛΜΡ είναι ρόμβος.

25. Παίρνουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΒΓ. Η κάθετη της ΑΒ στο Μ τέμνει την ΑΓ στο Ρ και η κάθετη στο Ν της ΝΡ τέμνει την ΑΒ στο Δ.
Να δείξετε ότι: $\widehat{N P \Delta} = \hat{A}$

Ε. “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

1. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ και την εφαπτομένη του σε σημείο Α διάφορο των Β, Γ η οποία τέμνει την διάμετρο ΒΓ στο σημείο Δ. Αν είναι $\overset{\frown}{AB} = 56^o$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε κύκλο και έστω Δ το σημείο τομής του με την υποτείνουσα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδειχθεί ότι ΕΓ = ΕΔ.